

Câu 2. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó bằng $2M + 4m$?

A. -1 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 0 .

Lời giải

Chọn A

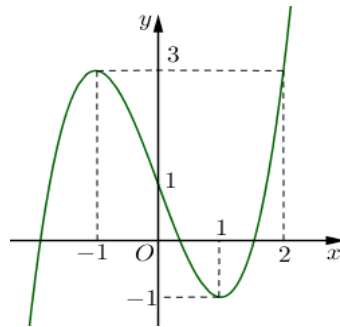
Tập xác định của hàm số đã cho là $D = [-1; 1]$.

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

$$y(-1) = 0; y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; y(1) = 0; y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } M = \frac{1}{2}; m = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2M + 4m = -1.$$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm của Phương trình $f(3 - \sqrt{4-x^2}) = 3$ là



A. 1 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } f(3 - \sqrt{4-x^2}) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{4-x^2} = -1 \\ 3 - \sqrt{4-x^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} = 4 \text{ (vn)} \\ \sqrt{4-x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3},$$

Câu 4. Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$

B. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2} (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$

C. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2} (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$

D. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$

Lời giải

Chọn D

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB AC \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 (1 - \cos^2 A)}$$

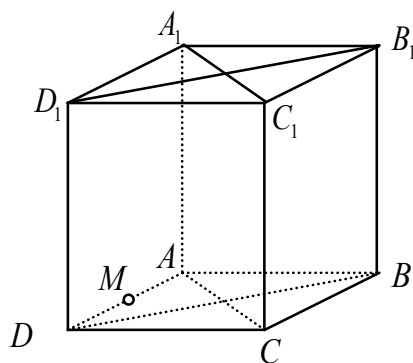
$$= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}.$$

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overline{B_1M} \cdot \overline{BD_1}$ là:

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{3}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overline{B_1M} \cdot \overline{BD_1} &= (\overline{B_1B} + \overline{BA} + \overline{AM})(\overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DD_1}) \\ &= \overline{B_1B} \cdot \overline{DD_1} + \overline{BA}^2 + \overline{AM} \cdot \overline{AD} \\ &= -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của đoạn SG .

Biết $\overline{SM} = x\overline{SA} + y\overline{SB} + z\overline{SC}$. Tính $T = x + 2y + 6z$.

- A. $T = \frac{1}{3}$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = \frac{2}{3}$. D. $T = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì M là trung điểm của đoạn SG và G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\overline{SM} = \frac{1}{2} \overline{SG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC}) = \frac{1}{6} \overline{SA} + \frac{1}{6} \overline{SB} + \frac{1}{6} \overline{SC}.$$

$$\text{Vậy, } T = x + 2y + 6z = \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2}.$$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;0;1), B(1;1;-1), C(5;0;-2)$. Tìm tọa độ điểm H sao cho tứ giác $ABCH$ theo thứ tự đó lập thành hình thang cân với hai đáy AB, CH .

A. $H(7;1;-4)$.

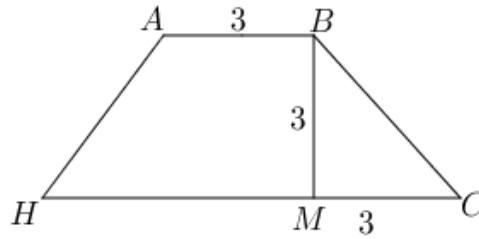
B. $H(-1;-3;4)$.

C. $H(3;-1;0)$.

D. $H(1;-2;2)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;1;-2) \\ \overrightarrow{AC} = (6;0;-3) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-3;-6;-6) \Rightarrow d(C; AB) = \frac{|[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]|}{|\overrightarrow{AB}|} = 3.$

$\overrightarrow{BC} = (4;-1;-1) \Rightarrow BC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Gọi M là hình chiếu của B lên $HC \Rightarrow BM = 3$.

Tam giác BMC vuông tại M , có $MC = \sqrt{BC^2 - BM^2} = 3 \Rightarrow HC = AB + 2MC = 9 \Rightarrow \overrightarrow{CH} = 3\overrightarrow{BA}$.

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (-2;-1;2) \\ \overrightarrow{CH} = (x-5; y; z+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5 = 3 \cdot (-2) \\ y = 3 \cdot (-1) \\ z+2 = 3 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow H(-1;-3;4).$

cách khác: Có thể làm ngược, thử các điểm

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-3)$. Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm M qua trục Oy .

A. $M'(2;1;-3)$.

B. $M'(-2;-1;3)$.

C. $M'(2;-1;-3)$.

D. $M'(-2;-1;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có điểm đối xứng qua trục Oy là điểm $M'(-x_0; y_0; -z_0)$.

Vậy điểm $M(2;-1;-3)$ có điểm đối xứng qua trục Oy là điểm $M'(-2;-1;3)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với: $\overrightarrow{AB} = (1;-2;2)$; $\overrightarrow{AC} = (3; -4; 6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là:

A. 29.

B. $\sqrt{29}$.

C. $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

D. $2\sqrt{29}$.

Lời giải

Ta có

$AB^2 = 1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9$, $AC^2 = 3^2 + (-4)^2 + 6^2 = 61$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot 3 + (-2)(-4) + 2 \cdot 6 = 23$.

$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 61 + 9 - 2 \cdot 23 = 24$.

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9+61}{2} - \frac{24}{4} = 29$.

Vậy $AM = \sqrt{29}$.

Câu 10. Thống kê điểm trung bình cuối học kì 1 môn Toán của một số học sinh lớp 12A được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	$[6,5;7)$	$[7;7,5)$	$[7,5;8)$	$[8;8,5)$	$[8,5;9)$	$[9;9,5)$	$[9,5;10)$
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Số trung vị (làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A.** 7,15. **B.** 9,15. **C.** 7,75. **D.** 8,15.

Lời giải

Chọn D

Cỡ mẫu là $n = 82$.

Gọi x_1, x_2, \dots, x_{82} là các giá trị điểm trung bình môn Toán của học sinh lớp 12A theo thứ tự tăng dần.

Vì cỡ mẫu chẵn nên ta có trung vị là $\frac{x_{41} + x_{42}}{2}$.

Mà hai giá trị x_{41}, x_{42} thuộc nhóm $[8;8,5)$ nên nhóm này chứa trung vị.

Vậy ta có giá trị trung vị là $M_e = 8 + \frac{\frac{82}{2} - (8+10+16)}{24} \cdot (8,5 - 8) = 8,14583 \approx 8,15$.

Câu 11. Một lớp học có 30 học sinh, được chia thành 3 nhóm với các điểm số trung bình và phương sai của từng nhóm như sau:

* Nhóm 1: $n_1 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_1 = 7,0$, phương sai $S_1^2 = 1,2$.

* Nhóm 2: $n_2 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_2 = 6,8$, phương sai $S_2^2 = 1,0$.

* Nhóm 3: $n_3 = 10$, điểm trung bình $\overline{X}_3 = 7,2$, phương sai $S_3^2 = 1,4$.

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm $S_{\text{ghép}}^2$ cho cả lớp (làm tròn đến hàng phần chục).

- A.** $S_{\text{ghép}}^2 = 1,2$. **B.** $S_{\text{ghép}}^2 = 1,3$. **C.** $S_{\text{ghép}}^2 = 1,4$. **D.** $S_{\text{ghép}}^2 = 1,5$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm

$$S_{\text{ghép}}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + (n_3 - 1)S_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3}$$

Tính tổng $(n_i - 1) \times S_i^2$ cho mỗi nhóm:

$$(n_1 - 1)S_1^2 = (10 - 1) \times 1,2 = 9 \times 1,2 = 10,8$$

$$(n_2 - 1)S_2^2 = (10 - 1) \times 1,0 = 9 \times 1,0 = 9,0$$

$$(n_3 - 1)S_3^2 = (10 - 1) \times 1,4 = 9 \times 1,4 = 12,6$$

Tính tổng các giá trị vừa tính được: $10,8 + 9,0 + 12,6 = 32,4$

Tính số lượng quan sát trừ đi 3: $n_1 + n_2 + n_3 - 3 = 30 - 3 = 27$

Tính phương sai ghép nhóm: $S_{\text{ghép}}^2 = \frac{32,4}{27} = 1,2$.

Câu 12. Phương trình $2\cos x - \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn B

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 13. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 5x \cdot \sin x$, biết $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. $\frac{15}{32}.$

B. $-\frac{15}{32}.$

C. $\frac{17}{32}.$

D. $-\frac{17}{32}.$

Lời giải

Chọn B

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{4}$$

$$A = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 5x \cdot \sin x$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 4x) + \frac{1}{2}[\sin(-4x) + \sin 6x]$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 6x) = \sin 4x \cdot \cos 2x = 2 \sin 2x \cdot \cos^2 2x$$

$$= 2 \sin 2x(1 - \sin^2 2x) = -\frac{15}{32}.$$

Câu 14. Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$. Biểu diễn của $P = \log_2 \frac{40}{3}$ theo a và b là:

A. $P = 3 + a - 2b.$

B. $P = 3 + a - \frac{1}{2}b.$

C. $P = \frac{3a}{2b}.$

D. $P = 3 + a - \sqrt{b}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \log_2 \frac{40}{3} = \log_2 40 - \log_2 3 = \log_2 8 + \log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 9 = 3 + a - \frac{1}{2}b.$$

Câu 15. Phương trình $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ là

A. $\frac{3}{8}.$

B. $\frac{33}{64}.$

C. $5.$

D. $66.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \in (0; +\infty) \setminus \left\{32, \frac{1}{2}\right\}$.

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow t \neq 5; t \neq -1$, phương trình có dạng

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{8}$$

Câu 16. Ba số phân biệt có tổng là 434 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 3, thứ 10, thứ 45 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 1480?

A. 20 .

B. 19 .

C. 18 .

D. 21 .

Lời giải**Chọn A.**

Gọi ba số đó là x, y, z . Do ba số là các số hạng thứ 3, thứ 10, thứ 45 của một cấp số cộng nên ta có: $x = u_3; y = u_{10} = x + 7d; z = u_{45} = x + 42d$.

Theo giả thiết, ta có: $x + y + z = x + x + 7d + x + 42d = 3x + 49d = 434$.

Mặt khác, do x, y, z là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên:

$$y^2 = xz \Leftrightarrow (x + 7d)^2 = x(x + 42d) \Leftrightarrow d(-4x + 7d) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ -4x + 7d = 0 \end{cases}$$

Với $d = 0$, ta có: $x = y = z = \frac{434}{3}$. Suy ra $n = 1480 : \frac{434}{3} = \frac{2220}{217} \notin \mathbb{N}$.

Với $-4x + 7d = 0$, ta có: $\begin{cases} -4x + 7d = 0 \\ 3x + 49d = 434 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ d = 8 \end{cases}$. Suy ra $u_1 = u_3 - 2d = 14 - 2 \cdot 8 = -2$.

$$\text{Do đó, } S_n = 1480 \Leftrightarrow \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} = 1480 \Leftrightarrow \frac{[2 \cdot (-2) + 8(n-1)]n}{2} = 1480 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 20 \\ n = -\frac{37}{2} \end{cases}$$

Vậy $n = 20$.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, số hạng đầu $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên bằng 14950. Tính tổng

$$S = \frac{1}{u_2 \sqrt{u_1} + u_1 \sqrt{u_2}} + \frac{1}{u_3 \sqrt{u_2} + u_2 \sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{u_{2025} \sqrt{u_{2024}} + u_{2024} \sqrt{u_{2025}}} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{b}} \right).$$

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Khi đó:

$$S_{100} = 100u_1 + \frac{100 \cdot 99}{2} d \Leftrightarrow 100 + 4950d = 14950 \Leftrightarrow d = 3.$$

Do đó $u_{2025} = u_1 + 2024d = 6073$.

Ta có:
$$\frac{1}{u_{k+1}\sqrt{u_k} + u_k\sqrt{u_{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{u_k} \cdot \sqrt{u_{k+1}} \cdot (\sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k+1}})} = \frac{1}{d} \cdot \frac{\sqrt{u_{k+1}} - \sqrt{u_k}}{\sqrt{u_k} \cdot \sqrt{u_{k+1}}} = \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_k}} - \frac{1}{\sqrt{u_{k+1}}} \right).$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_2}} \right) + \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_2}} - \frac{1}{\sqrt{u_3}} \right) + \dots + \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_{2024}}} - \frac{1}{\sqrt{u_{2025}}} \right) = \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_{2025}}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6073}} \right). \end{aligned}$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy AB và CD , biết $AB = 2a$; $AD = CD = CB = a$; $SAD = SBD = 90^\circ$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAD) ; (SBD) bằng α sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$.

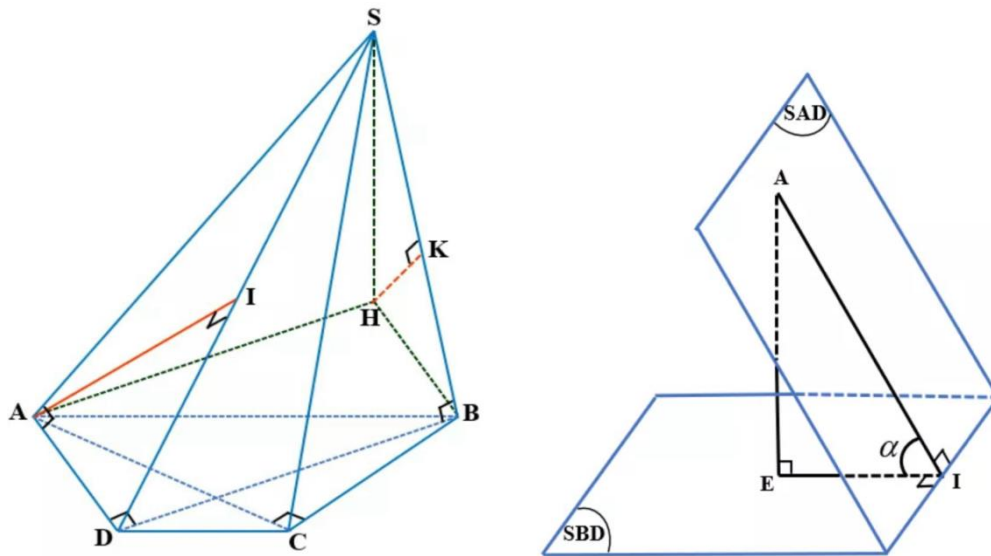
B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $ACB = 90^\circ \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

nên tam giác ABC có diện tích $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$.

Theo giả thiết: $AD \perp SA \Rightarrow AD \perp AH$ (Định lý ba đường vuông góc); tương tự: $BD \perp SB \Rightarrow BD \perp BH$. Suy ra tứ giác $ADBH$ là hình chữ nhật (do $ADB = 90^\circ$).

Gọi $E; I$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SBD) và trên SD ta có:

$$\left((SAD), (SBD) \right) = AIE = \alpha.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ \text{ nên } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Mặt khác: $AE = d(A, (SBD)) = d(H, (SBD)) = HK$ (với K là hình chiếu vuông góc của H trên SB).

$$\text{Đặt } SH = x. \text{ Khi đó: } AE = HK = \frac{HS \cdot HB}{\sqrt{HS^2 + HB^2}} = \frac{x \cdot a}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \sqrt{x^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 + 3a^2} \Rightarrow AI = \frac{AS \cdot AD}{\sqrt{AS^2 + AD^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + 3a^2} \cdot a}{\sqrt{x^2 + 4a^2}}.$$

Trong tam giác vuông AEI :

$$\sin \alpha = \frac{AE}{AI} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{AE}{AI} \Leftrightarrow 2AI = \sqrt{5}AE \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 3a^2} \cdot a}{\sqrt{x^2 + 4a^2}} = \sqrt{5} \cdot \frac{x \cdot a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 3a^2)(x^2 + a^2) = 5x^2(x^2 + 4a^2) \Leftrightarrow 4x^4 + 16x^2 \cdot a^2 + 12a^4 = 5x^4 + 20x^2 \cdot a^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4a^2 \cdot x^2 - 12a^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2a^2 \\ x^2 = -6a^2 \end{cases} \Rightarrow x = a\sqrt{2}. \text{ Hay } SH = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là: } V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}.$$

Câu 19. Giá trị của tổng $T = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$ bằng

A. 3^5 .

B. 5^5 .

C. 6^5 .

D. 4^5 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^5 = C_5^0 + xC_5^1 + x^2C_5^2 + x^3C_5^3 + x^4C_5^4 + x^5C_5^5.$$

$$\text{Cho } x=2, \text{ thay vào kiểm tra ta được: } 3^5 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5.$$

$$\text{Vậy } T = 3^5.$$

Câu 20. Trong một đề thi trắc nghiệm môn Toán có loại câu hỏi trả lời dạng đúng sai. Một câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý hỏi học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai. Nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài bằng cách chọn phương án ngẫu nhiên để trả lời cho 2 câu hỏi loại đúng sai này. Hỏi có bao nhiêu cách chọn phương án để học sinh đó được 1 điểm ở phần trả lời 2 câu hỏi này.

A. 17.

B. 18.

C. 16.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Xét biến cố A "Học sinh đó được 1 điểm"

Để đạt 1 điểm sẽ có các trường hợp sau xảy ra:

TH1: Đúng cả 4 ý của 1 câu hỏi và sai cả 4 ý câu hỏi còn lại hoặc ngược lại có số cách chọn phương án là: $2 \cdot C_4^4 \cdot C_4^0$.

TH2: Mỗi câu hỏi đúng 3 ý và sai 1 ý có số cách chọn phương án là: $C_4^3 \cdot C_4^3$.

$$\text{Vậy: } n(A) = 2 \cdot C_4^4 \cdot C_4^0 + C_4^3 \cdot C_4^3 = 18.$$

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2;0;-3), B(-4;-4;1), C(-4;1;-1)$.

a) Điểm $A'(2;0;-3)$ đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) .

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

c) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là $r = 1,12$.

d) Cho hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MN = 3$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là 6,56.

Lời giải

a) Đúng.

b) Ta có $AB = \sqrt{4+16+16} = 6$; $AC = \sqrt{4+1+4} = 3$; $BC = \sqrt{0+25+4} = \sqrt{29}$.

Cạnh AB lớn nhất nên góc C lớn nhất

Do $\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} > 0$ nên C là góc nhọn, do đó tam giác ABC nhọn **b) sai**.

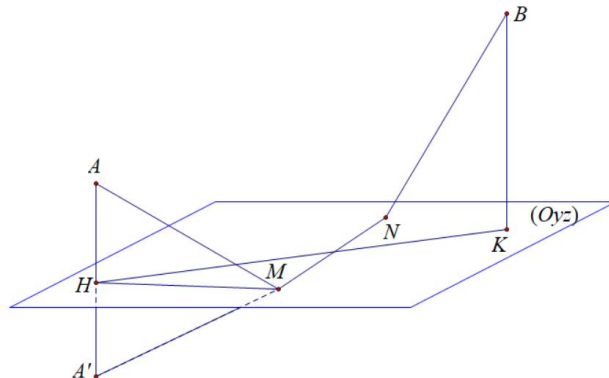
c) Ta có diện tích tam giác ABC

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4} \sqrt{(9+\sqrt{29})(9-\sqrt{29})(3+\sqrt{29})(\sqrt{29}-3)} = \sqrt{65}.$$

Mặt khác $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{65}}{9+\sqrt{29}} \approx 1,12$. **c) đúng**.

d) Ta có $H(0;0;-3), K(0;-4;1)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-2;0;-3)$ và $B(-4;-4;1)$ xuống mặt phẳng (Oyz) .

Nhận xét: A, B nằm về cùng một phía với mặt phẳng (Oyz) .



Gọi A' đối xứng với A qua (Oyz) , suy ra H là trung điểm đoạn AA' nên $AM = A'M$.

Mà $A'H = AH = 2; BK = 6; HK = 4\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } AM + BN &= A'M + BN = \sqrt{HA'^2 + HM^2} + \sqrt{BK^2 + KN^2} \\ &\geq \sqrt{(HA' + BK)^2 + (HM + KN)^2} = \sqrt{36 + (HM + KN)^2} \end{aligned}$$

Lại có $HM + MN + NK \geq HK \Rightarrow HM + NK \geq HK - MN = 4\sqrt{2} - 3$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi H, M, N, K thẳng hàng và theo thứ tự đó.

$$\text{Suy ra } AM + BN \geq \sqrt{36 + (HM + KN)^2} \geq \sqrt{36 + (4\sqrt{2} - 3)^2} = \sqrt{77 - 24\sqrt{2}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng $\sqrt{77 - 24\sqrt{2}} \approx 6,56$. **d) đúng**.

Câu 2: Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn.

Số giờ nắng	[130;160)	[160;190)	[190;220)	[220;250)	[250;280)	[280;310)
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	2	4	10	3

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Xét số liệu ở Nha Trang thì khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: 32,64
- b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn
- c) Xét số liệu của Quy Nhơn ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 30,59
- d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 của Nha Trang đồng đều hơn

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Cỡ mẫu: $n = 20$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{20}$ là mẫu số liệu gốc về số giờ nắng trong tháng 6 trong 20 năm của Nha Trang được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1 \in [130; 160); x_2 \in [160; 190); x_3 \in [190; 220); x_4; \dots; x_{11} \in [220; 250); x_{12}; \dots; x_{18} \in [250; 280); x_{19}; x_{20} \in [280; 310)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_5 + x_6) \in [220; 250)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1 = 220 + \frac{\frac{20}{4} - (1+1+1)}{8}(250 - 220) = 227,5$ (a Sai)

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) \in [250; 280)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3 = 250 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - (1+1+1+8)}{7}(280 - 250) = \frac{1870}{7}$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 39,64$

Gọi $y_1; y_2; \dots; y_{20}$ là mẫu số liệu gốc về số giờ nắng trong tháng 6 trong 20 năm của Quy Nhơn được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có:

$y_1 \in [160; 190); y_2; y_3 \in [190; 220); y_4; \dots; y_7 \in [220; 250); y_8; \dots; y_{17} \in [250; 280); y_{18}; \dots; y_{20} \in [280; 310)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(y_5 + y_6) \in [220; 250)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1' = 220 + \frac{\frac{20}{4} - (1+2)}{4}(250 - 220) = 235$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(y_{15} + y_{16}) \in [250; 280)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3' = 250 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - (1+2+4)}{10}(280 - 250) = 274$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q' = Q_3' - Q_1' = 39$

Vậy nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn (**b đúng**)

Xét số liệu của Nha Trang:

$$\text{Số trung bình: } \bar{x}_X = \frac{1.145 + 1.175 + 1.205 + 8.235 + 7.265 + 2.295}{20} = 242,5$$

$$\text{Độ lệch chuẩn: } \sigma_X = \sqrt{\frac{1.145^2 + 1.175^2 + 1.205^2 + 8.235^2 + 7.265^2 + 2.295^2}{20} - 242,5^2} \approx 35,34$$

Xét số liệu của Quy Nhơn:

$$\text{Số trung bình: } \bar{x}_Y = \frac{1.175 + 2.205 + 4.235 + 10.265 + 3.295}{20} = 253$$

$$\text{Độ lệch chuẩn: } \sigma_Y = \sqrt{\frac{1.175^2 + 2.205^2 + 4.235^2 + 10.265^2 + 3.295^2}{20} - 253^2} \approx 30,59 \text{ (c đúng)}$$

Vậy nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn (**d sai**)

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \log_{2025}(4 - x^2)$

a) Tập xác định của hàm số chứa 3 giá trị nguyên.

b) Hàm số có đạo hàm $y' = \frac{1}{(4 - x^2) \ln 2025}$.

c) Cho $C(1; -3)$ và A, B là giao điểm của $y = f(x)$ và trục hoành. Diện tích tam giác ABC bằng $3\sqrt{3}$.

d) Tập hợp các giá trị thực của tham số m để $y = f(x)$ cắt $y = \log_{2025}(2x + m - 1)$ tại hai điểm phân biệt là $(a; b)$. Giá trị $a + b = 11$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Vậy TXĐ: $D = (-2; 2)$ chứa 3 giá trị nguyên.

Chọn ĐÚNG.

b) Ta có $y' = \frac{-2x}{(4 - x^2) \ln 2025}$.

Chọn SAI.

c) Xét phương trình $\log_{2025}(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Giả sử $A(-\sqrt{3}; 0), B(\sqrt{3}; 0) \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}; d(C, Ox) = 3$.

$$\text{Vậy } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, Ox) = 3\sqrt{3}$$

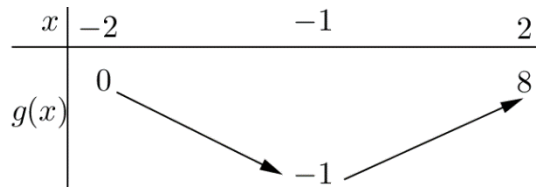
Chọn ĐÚNG.

d) Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\log_{2025}(4 - x^2) = \log_{2025}(2x + m - 1) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ 4-x^2 = 2x+m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x^2+2x=5-m \end{cases} (*)$$

Xét $g(x) = x^2 + 2x$ trên $(-2; 2)$ ta có bảng biến thiên



Để hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi pt (1) có hai nghiệm phân biệt hay hệ (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < 5-m < 0 \Leftrightarrow 5 < m < 6$ hay $a=5, b=6 \Rightarrow a+b=11$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật,

$AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SD , H là trung điểm cạnh AB . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

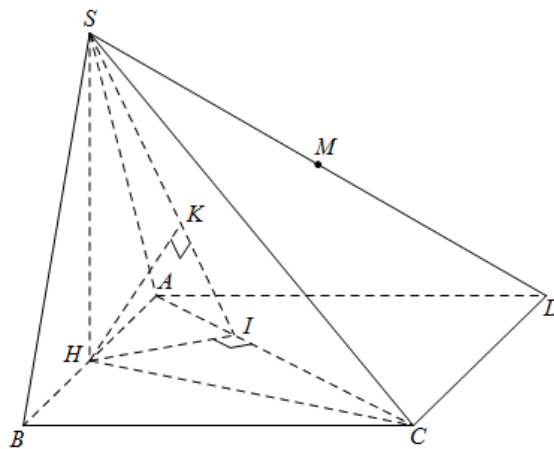
a) $SH \perp (ABCD)$

b) $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

c) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SCA

d) Khoảng cách từ điểm M đến mp(SAC) bằng $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải



a) Vì tam giác SAB đều nên H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Chọn ĐÚNG.

b) Do $\triangle SAB$ đều cạnh a nên ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = 2a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn SAI.

c) Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HC là hình chiếu vuông góc của SC trên

$$mp(ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = SCH$$

Chọn SAI.

d) Ta có $SD \cap mp(SAC) = S$ nên $\frac{d(M, (SAC))}{d(D, (SAC))} = \frac{MS}{DS} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow d(M, (SAC)) = \frac{1}{2} d(D, (SAC)) = \frac{1}{2} d(B, (SAC)).$$

Mặt khác $\frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BA}{HA} = 2 \Rightarrow d(B, (SAC)) = 2 d(H, (SAC)) \Rightarrow d(M, (SAC)) = d(H, (SAC)).$

Gọi I là hình chiếu của H trên AC

Ta có $\begin{cases} AC \perp HI \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK.$

$$\begin{cases} HK \perp SI \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK.$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$$

$$\triangle AIH \sim \triangle ABC (g - g) \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{IH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow IH = \frac{BC \cdot AH}{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\triangle SHI \text{ có } HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{57}}{19}$$

Vậy $d(M, (SAC)) = d(H, (SAC)) = HK = \frac{a\sqrt{57}}{19}$

Chọn SAI.

Câu 5. Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Xét các biến cố A, B, C sau đây:

A : “Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”

B : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con là 7”

C : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con lớn hơn hoặc bằng 8”

a) Số phần tử của không gian mẫu bằng 12.

b) $P(B) = \frac{1}{18}.$

c) Hai biến cố A và B không độc lập.

d) $P(C) = \frac{19}{36}.$

Lời giải

a) Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập thì số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$

Chọn ĐÚNG

b) $B = \{(1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1)\}$, nên $n(B) = 6$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Chọn ĐÚNG.

c) Gọi \bar{A} là biến cố đối của biến cố A

\bar{A} : “Không có con súc sắc nào xuất hiện mặt 6 chấm”

Do đó $n(\bar{A}) = 5 \cdot 5 = 25$.

$$P(\bar{A}) = \frac{25}{36}, \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{216}.$$

Xét biến cố AB : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con là 7, trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”.

Ta có $AB = \{(1;6), (6;1)\}$. Do đó $P(AB) = \frac{2}{36}$

$\Rightarrow P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$. Vậy A, B không độc lập.

Chọn Đúng.

d) Biến cố C xảy ra khi và chỉ khi một trong các biến cố sau xảy ra

C_1 : “Con súc sắc I ra mặt 2 chấm và con súc sắc II ra mặt 6 chấm”.

$$P(C_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

C_2 : “Con súc sắc I ra mặt 3 chấm và con súc sắc II ra mặt 5 hoặc 6 chấm”.

$$P(C_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}.$$

C_3 : “Con súc sắc I ra mặt 4 chấm và con súc sắc II ra mặt 4, 5 hoặc 6 chấm”.

$$P(C_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36}.$$

C_4 : “Con súc sắc I ra mặt 5 chấm và con súc sắc II ra mặt 3, 4, 5 hoặc 6 chấm”.

$$P(C_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36}.$$

C_5 : “Con súc sắc I ra mặt 6 chấm và con súc sắc II ra mặt 2, 3, 4, 5 hoặc 6 chấm”.

$$P(C_5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}.$$

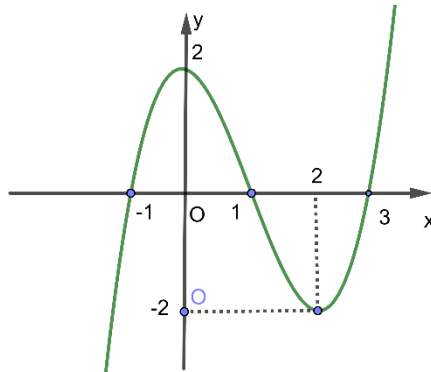
Theo quy tắc cộng xác suất ta được:

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) + P(C_5) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$$

Chọn SAI.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(1) + f(3) = 2f(-1)$. Hàm số

$y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 1), (3; +\infty)$.

b) Hàm số $y = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ có ba điểm cực trị.

c) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 3]$ lần lượt là $f(1), f(-1)$.

d) Hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f^2(2x+1) - x^2 f(1-x) = 3$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm thuộc đồ thị $y = f(x)$ có hoành độ bằng 0 là $y = 2x + 1$.

Lời giải

a) Từ đồ thị ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$ **ĐÚNG.**

b) Ta có $y' = -\frac{2}{(x-1)^2} f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = -1 \\ \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \frac{x+1}{x-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Lập BBT suy ra hàm số $y = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ có hai điểm cực trị. **SAI**

c) Xét hàm số $y = f(x)$ từ đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(3)$	$+\infty$

Vì $f(1) + f(3) = 2f(-1) \Rightarrow f(1) - f(-1) = f(-1) - f(3) > 0 \Rightarrow f(-1) > f(3)$

Vậy GTLN, GTNN lần lượt là $f(1), f(3)$. **SAI**

d) Từ $f^2(2x+1) - x^2 f(1-x) = 3 \Rightarrow 4f'(2x+1)f(2x+1) - 2xf'(1-x) + x^2 f''(1-x) = 0$

Thay $x = 0$ ta được $4f'(3)f(3) - 2f(0) + f'(0) = 0 \Rightarrow -2.f(0) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$

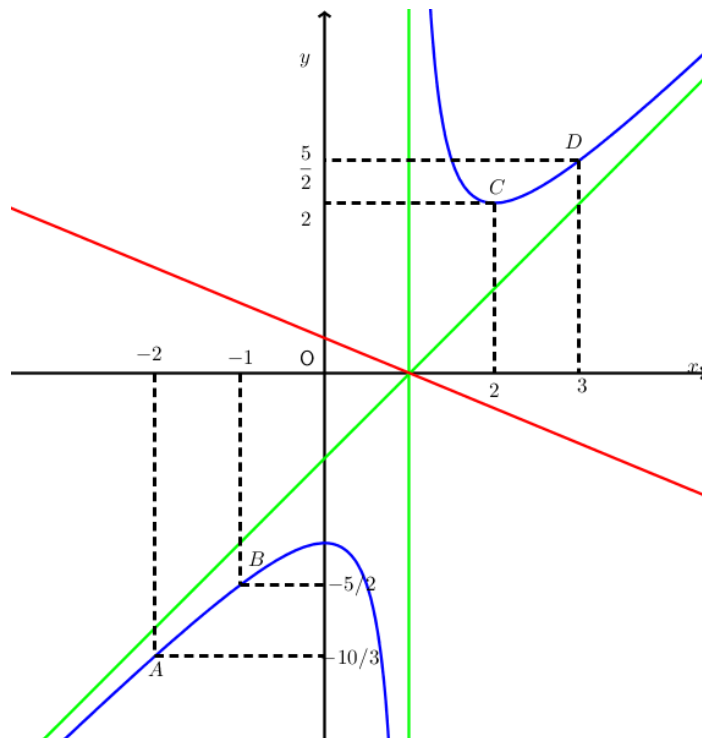
Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số là $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Rightarrow y = 2x + 1$ **ĐÚNG**

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN: Trong mỗi câu, hãy viết phần trả lời ngắn không quá 4 ký tự (phải là số) và để ngoài MathType

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} (C)$ và hai đường thẳng $d: y = (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2} - 1$. A, B, C, D là các điểm thuộc đồ thị hàm số (C) có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 2; 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = MA + MB + NC + ND$ với M, N lần lượt là các điểm thuộc đường thẳng d . (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp số: 12,7.



Xét hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} (C)$ có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$ nên đường thẳng phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho có dạng:

$$\frac{x - y - 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{x - 1}{\sqrt{1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = \sqrt{2} \cdot (x - 1) \\ x - y - 1 = -\sqrt{2} \cdot (x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2} - 1 \\ y = (1 + \sqrt{2})x - \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Do đó hai đường thẳng d, d' chính là hai trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} (C)$

Ta có: $A\left(-2; -\frac{10}{3}\right); B\left(-1; -\frac{5}{2}\right); C(2; 2); D\left(3; \frac{5}{2}\right)$ suy ra hai điểm A, B cùng thuộc 1 nhánh của đồ thị hàm số (nhánh có điều kiện $x < 1$) và hai điểm C, D cùng thuộc 1 nhánh của đồ thị hàm số (nhánh có điều kiện $x > 1$)

Khi đó, gọi B', D' là các điểm đối xứng với B, D qua đường thẳng d

Ta có đường thẳng BB' và đường thẳng DD' đều có hệ số góc là: $k = \frac{-1}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$.

Phương trình đường thẳng BB' : $y = (\sqrt{2} + 1) \cdot (x + 1) - \frac{5}{2} = (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} - \frac{3}{2}$

Phương trình đường thẳng DD' : $y = (\sqrt{2} + 1) \cdot (x - 3) + \frac{5}{2} = (\sqrt{2} + 1)x - 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

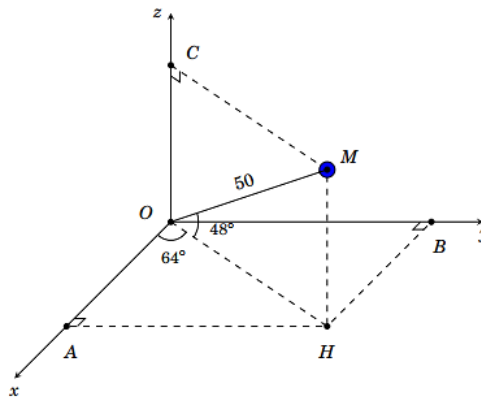
Gọi I, J là giao điểm của đường thẳng BB', DD' với đường thẳng d thì $I\left(\frac{\sqrt{2}}{8}; \frac{9\sqrt{2}-10}{8}\right)$ và

$J\left(\frac{16-\sqrt{2}}{8}; \frac{10-9\sqrt{2}}{8}\right)$

Khi đó $B'\left(\frac{4+\sqrt{2}}{4}; \frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$ và $D'\left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}; -\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$.

Ta có: $T = MA + MB + NC + ND = MA + MB' + NC + ND' \geq AB' + CD' \approx 12,1$.

Câu 2. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}; \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm $M(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ là (làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Tam giác OMH vuông tại H có $OM = 50$, $\angle OMH = 48^\circ$ nên ta có:

$OH = OM \cdot \cos 48^\circ \approx 33,5$; $OC = MH = OM \cdot \sin 48^\circ \approx 37,2$

Tam giác OAH vuông tại A , $OH = 33,5$, $\angle AOH = 64^\circ$ nên ta có:

$OA = OH \cdot \cos 64^\circ \approx 14,7$; $OB = AH = OH \cdot \sin 64^\circ \approx 30,1$

Suy ra $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 14,7\vec{i} + 30,1\vec{j} + 37,2\vec{k}$

Vậy $M(14,7; 30,1; 37,2)$

vậy $a + b + c = 82$.

Câu 3. Cho hai số nguyên không âm x, y thỏa mãn đồng thời $x^2 + y^2 \geq 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1$. Biết rằng có duy nhất một cặp số nguyên không âm (x, y) thỏa mãn $mx + y - 1 + m = 0$ mãn. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán?

Lời giải

Trả lời: 15

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 16$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ nằm trên hay phía ngoài đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 16$.

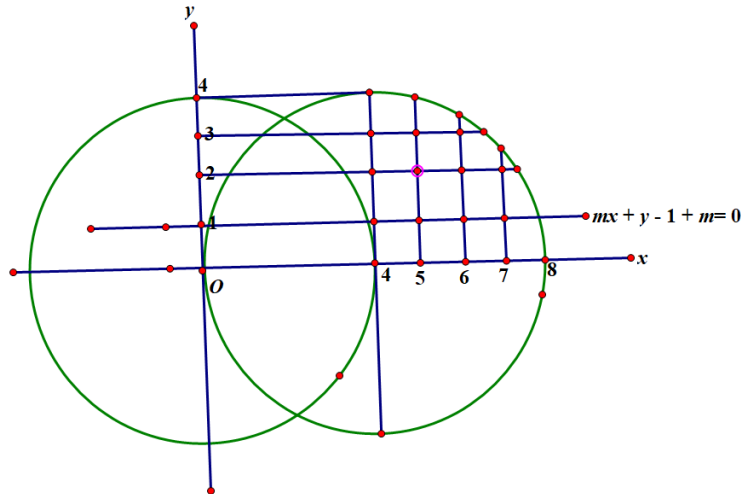
Do $(x; y) = (0; 0)$ không thỏa mãn điều kiện đề bài nên $x^2 + 2y^2 + 1 > 1$.

Khi đó $\log_{x^2+2y^2+1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 1 \leq y^2 + 8x + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x \leq 0$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ nằm trong hoặc trên đường tròn $(C_2): x^2 + y^2 - 8x = 0$.

Vậy tập hợp bộ số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là các điểm có tọa độ nguyên không âm thỏa mãn:

$$\begin{aligned} x = 3 &\Rightarrow y = 3; x = 4 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4\}; x = 5 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\} \\ x = 6 &\Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}; x = 7 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2\}; x = 8 \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

có tổng 18 điểm thỏa mãn.

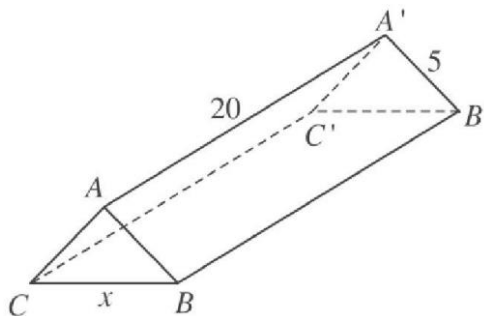


Nhận xét:

Để thỏa mã yêu cầu bài ra thì đường thẳng $mx + y - 1 + m = 0$ phải đi qua một trong các điểm trong 18 điểm trên.

Mặt khác đường thẳng $mx + y - 1 + m = 0$ luôn đi qua điểm cố định $M(-1; 1)$. Thay các điểm vào phương trình đường thẳng $mx + y - 1 + m = 0$, ứng với mỗi điểm ta có một giá trị của tham số m, tuy nhiên với các điểm có tung độ y=1 đều cho một giá trị m. Ngoài ra không có hai điểm nào trong 14 điểm còn lại và điểm $M(-1; 1)$ thẳng hàng. **Vậy có 14 giá trị m**

Câu 4. Một hành lang giữa hai toà nhà có hình dạng của một hình lăng trụ đứng. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20m, rộng 5m. Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC . Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 7,07

Ta có, $S_{ABC} = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4} \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Thể tích của hình lăng trụ: $V = S_{ABC} \cdot AA' = 5x\sqrt{100-x^2} \text{ (m}^3\text{)}.$

Xét hàm số $f(x) = 100x^2 - x^4 \Rightarrow f'(x) = 200x - 4x^3.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$ (do $0 < x < 10$).

Bảng biến thiên

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	2500	0

Vậy khi $x = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ thì thể tích lăng trụ là lớn nhất và $V_{\max} = 2500 \text{ (m}^3\text{)}.$

Câu 5. Trung tâm y tế dự phòng của huyện A có 3 bác sĩ, 4 kỹ thuật viên và 12 y tá. Để đảm bảo công tác phòng chống dịch Covid-19, lãnh đạo cấp trên yêu cầu trung tâm A phải đảm bảo trong một ngày có 3 ca trực sao cho ca 1 có 7 người và hai ca còn lại mỗi ca có 6 người. Biết là số cách phân chia sao cho mỗi ca có một bác sĩ và ít nhất một kỹ thuật viên là $\overline{abcdefg}$, tính $a+b+c+d+e+f+g$.

Lời giải

Trả lời: 36.

TH 1: Ca 1 có hai kỹ thuật viên:

Số cách sắp xếp 7 người vào ca 1: $C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^4 = 8.910$ (cách).

Số cách sắp xếp 6 người vào ca 2: $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_8^4 = 280$ (cách).

Số cách sắp xếp 6 người còn lại vào ca 3: 1 (cách).

→ Số cách sắp xếp của TH 1 là: $8910 \times 280 = 2.494.800$ (cách).

TH 2: Ca 2 có hai kỹ thuật viên:

Số cách sắp xếp 7 người vào ca 1: $C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{12}^5 = 9.504$ (cách).

Số cách sắp xếp 6 người vào ca 2: $C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^3 = 210$ (cách).

Số cách sắp xếp 6 người còn lại vào ca 3: 1 (cách).

→ Số cách sắp xếp của TH 2 là: $9504 \times 210 = 1.995.840$ (cách).

TH 3: Ca 3 có hai kỹ thuật viên:

Tương tự TH 2, nên số cách sắp xếp của TH 3 là: 1.995.840 (cách).

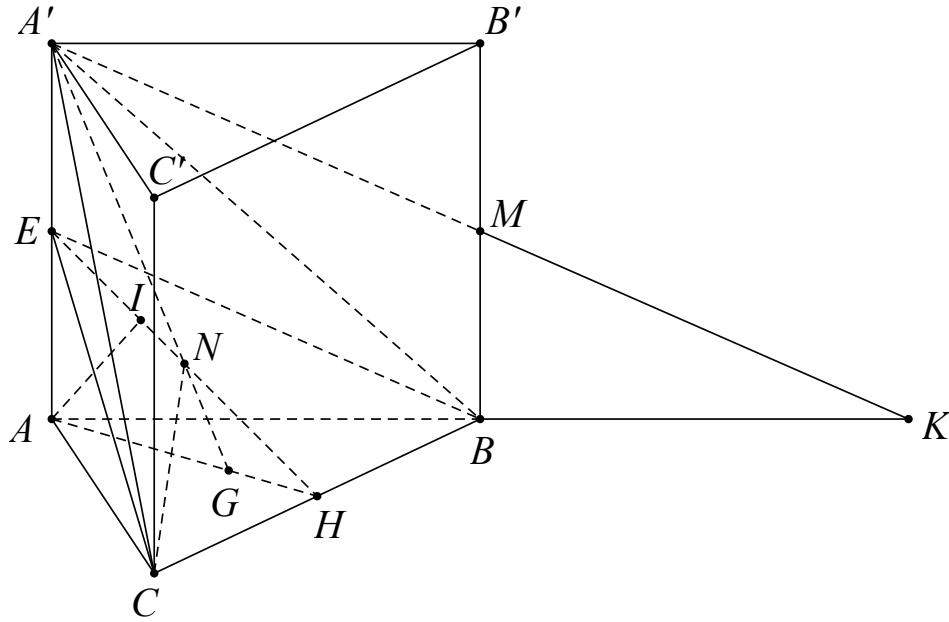
Vậy số cách sắp xếp theo ycbt là: $2.494.800 + 1.995.840 \times 2 = 6.486.480$ (cách).

$\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g = 6+4+8+6+4+8+0 = 36.$

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . M là trung điểm của BB' , N là điểm sao cho $\overrightarrow{A'N} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng CN và $A'M$ bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng xa^3 ($x \in \mathbb{Q}$). Khi đó x có giá trị bằng bao nhiêu? (làm tròn sau dấu phẩy hai chữ số)

Lời giải

Đáp số: 1,5.



Gọi E, H là trung điểm của AA', BC và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Gọi $A'M \cap AB = K$.

Ta có: $\overrightarrow{A'N} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}) = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{A'G}$ nên A', N, G thẳng hàng.

Khi đó: $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{A'N} - \overrightarrow{A'E} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{A'A} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{A'A} + \frac{1}{4} \overrightarrow{A'B} + \frac{1}{4} \overrightarrow{A'C}$

Và $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{A'H} - \overrightarrow{A'E} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{A'A} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{A'A} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A'B} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A'C}$

Do đó: $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EN}$ hay N là trung điểm của EH .

Ta có: $A'M \parallel EB$ nên $A'M \parallel (EBC)$ do đó

$$d(A'M, CN) = d(A'M, (ECB)) = d(K, (ECB)) = d(A, (ECB))$$

$$\text{Hạ } AI \perp EH \Rightarrow AI = d(A, (EBC)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Mà: } \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow \frac{7}{3a^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AE = a \text{ hay } AA' = 2a$$

$$\text{Do đó: } V_{ABC.A'B'C'} = 2a \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3.$$